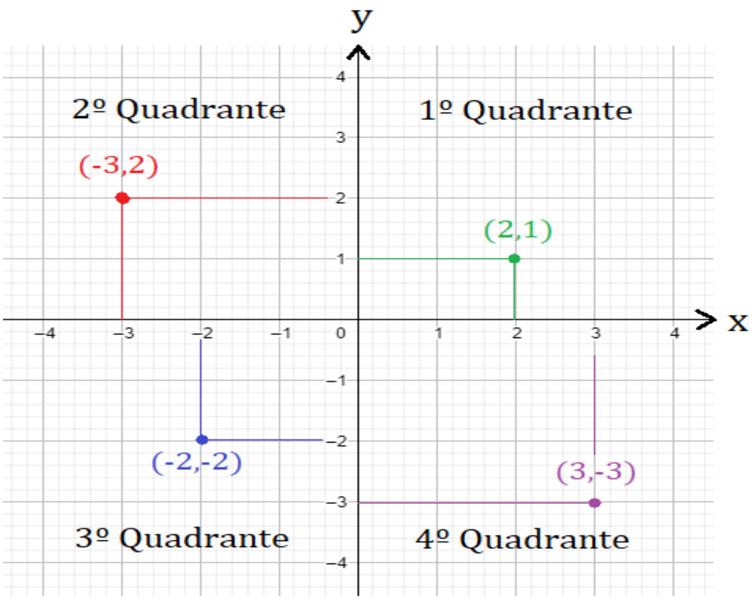
Conceito e o plano cartesiano:

A geometria analítica é, basicamente, o estudo da geometria dentro de um plano cartesiano. Por isso, para começar a estudá-la, é necessário rever os principais conceitos de um plano cartesiano.



Em um plano cartesiano existem dois eixos: o horizontal, chamado **eixo das abcissas** (eixo da variável x), e o vertical, o **eixo das coordenadas** (eixo da variável y). Eles se cruzam no ponto que chamamos de **origem**, no qual as duas variáveis são iguais à 0. À direita da origem, os valores de x são positivos, e à esquerda, negativos. De forma análoga, os valores do eixo y são positivos à cima da origem e negativos à baixo.

No plano cartesiano, existem pontos que se referem as variáveis x e y. Eles são escritos na seguinte notação (x,y). Essa notação refere-se a um **par ordenado**.

No exemplo de par ordenado (2,1), x=2 e y=1. No par ordenado (0,4), x=0 e y=4. Já em (4,-5), x=4 e y=-5.

Então, em geometria analítica, quando um exercício se refere a um **ponto P**, ele procura um **par ordenado** (x_p, y_p).

Para finalizar esse tópico, resta comentarmos sobre os quadrantes do plano cartesiano. Como os eixos dividem o plano em 4 quadrados, dizemos que existem 4 quadrantes. No **primeiro**, **todos** os pontos existentes **são positivos**. No **segundo**, a variável **x é negativa** e a **y é positiva**. No **terceiro**, **ambas** as variáveis são **negativas**. Já no **quarto**, a variável **x é positiva** e a **y é negativa**.

Exemplos:

Par ordenando (1,3) - primeiro quadrante

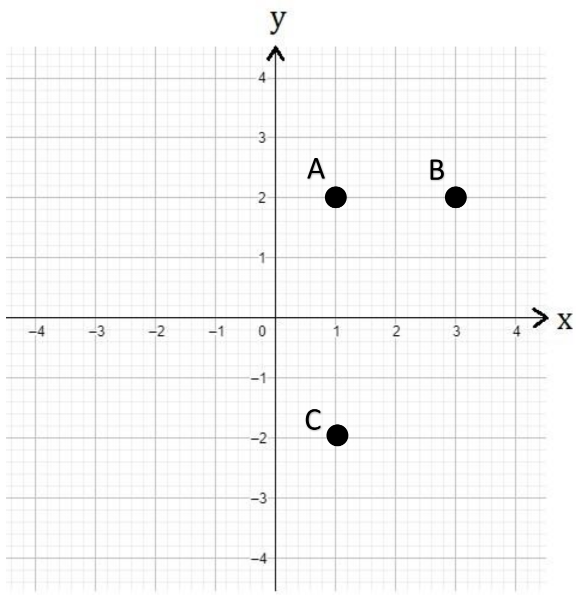
Par ordenado (-1,3) - segundo quadrante

Par ordenando (-1,-3) - terceiro quadrante

Par ordenado (1,-3) - quarto quadrante

Distância entre dois pontos

Agora que já vimos o que é um plano cartesiano e o que um par ordenado, vamos ver como calcular a distância entre dois pontos de um mesmo plano.



Considerando os pontos do plano cartesiano ao lado, sabemos que: A(1,2); B(3,2) e C(1, -2). Como o ponto A e o ponto B estão na **mesma coordenada** (ou seja, o y de ambas é igual), para calcular sua distância, basta ver a **diferença do x** dos dois pontos. Então, a distância entre A e B é igual a 3-1=2. De forma parecida, é possível calcular a distância entre os pontos A e B, que estão na **mesma abcissa** (ou seja, seu x é igual), então só precisamos calcular a **diferença do y** entre esses pontos, que é 2-(-2)=4. Mas, como fazemos para calcular a distância entre o ponto B e o ponto C, se esses pontos não possuem o mesmo x nem o mesmo y? Para isso é necessário usar a **fórmula de distância entre os dois pontos**, que é (sendo A e B dois pontos genéricos):

$$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Obs: d= distância

Então, a partir dessa formula, podemos calcular a d(B,C).

d(B,C)= $\sqrt{(1-3)^2 + (2-(-2))^2}$= $\sqrt{-2^2 + 4^2}$= $\sqrt{4+16}$=$\sqrt{20}$= $2\sqrt{5}$

Resumindo, podemos calcular a distância entre dois pontos utilizado as seguintes fórmulas:

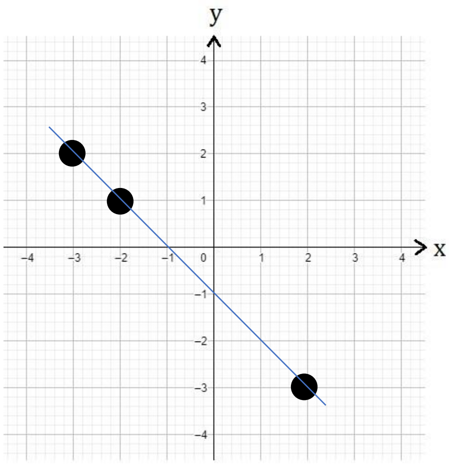
Se os pontos A e B forem paralelos ao eixo x: $\boldsymbol{d(A,B) = |x_B - x_A|}$

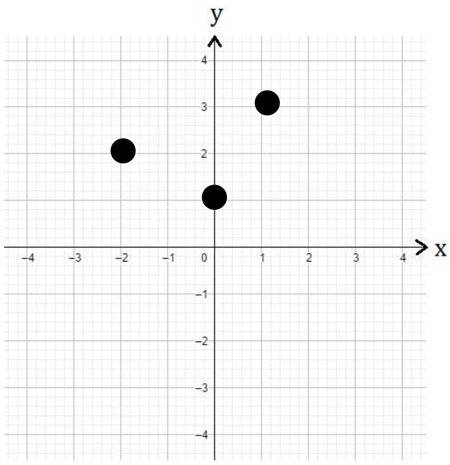
Se os pontos A e B forem paralelos ao eixo y: $\boldsymbol{d(A,B) = |y_B - y_A|}$

Para qualquer outro caso: $\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

Pontos colineares

Pontos são **colineares** quando formam uma **reta**. Por exemplo:





No primeiro exemplo, os pontos são colineares, já que é possível traçar uma reta entre eles. Já no exemplo 2, não é possível traçar uma reta, então os pontos não são colineares.

Para comprovar a **condição de alinhamento** de 3 pontos, é necessário que a equação dessa determinante seja satisfeita:

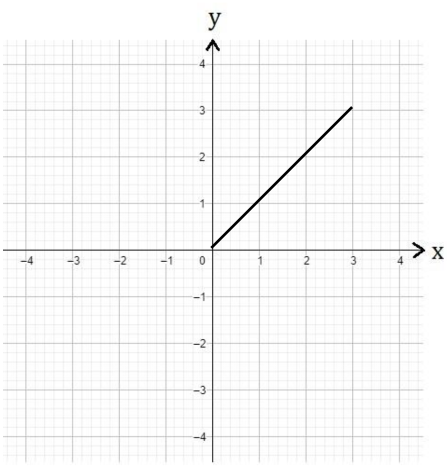
$$\begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Retas e funções

Já sabemos que quando pontos são colineares eles formam uma reta. Porém, quando temos dois pontos dados, como podemos encontrar a equação dessa reta?

Para isso vamos rever os principais conceitos de uma função de primeiro grau.

Sabemos que em **qualquer função**, toda **variável x precisa ter um y correspondente** (e somente 1). Vamos ver como isso funciona em uma função de primeiro grau.



Nesse exemplo, quando x=0, y=0. Quando x=1, y=1. Quando x=2, y=2. E assim continua. Então, podemos perceber que para cada valor de x, existe um valor de y correspondente.

Toda função de primeiro grau é definida pela **equação geral: ax+by+c=0**, sendo a,b e c números reais, a≠0 e b≠0 e (x,y) um ponto genérico.

Também podemos trazer essa função a uma equação reduzida, da seguinte maneira: ax+by+c=0 → -by=ax+c → y=$\frac{-a}{b}$ x + $\frac{-c}{b}$. Nessa equação reduzida, podemos dizer que $\frac{-a}{b}$= m, que será o coeficiente angular na reta, e $\frac{-c}{b}$= q, que será o coeficiente linear da reta.

Assim, chegamos que a **equação reduzida é: y=mx+q.**

É importante conhecer essas duas formas de se escrever a função de primeiro grau, pois as duas são usadas na geometria analítica.

Exemplos: 2x-3y+6=0 (equação geral)

3y=2x+6 → y=$\frac{2}{3}$x+$\frac{6}{3}$ → y=$\frac{2}{3}$x + 2 (reduzida), então, m=$\frac{2}{3}$ e q=2

4x-y+6=0 (equação geral)

y=4x+6 (reduzida), então m=4 e q=6

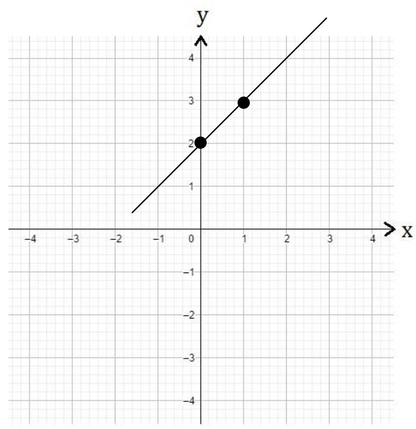
2y=4x+8

y=2x+4 (reduzida), então m=2 e q=4

4x-2y+8=0 (geral)

Como exemplo, vamos pensar em alguns pontos que pertencem a função y=x+2 para desenhá-la no plano cartesiano. Sabemos que seu coeficiente angular (m) é igual a 1 e o seu coeficiente angular é igual a 2.

x	y
0	2
1	3



Dica: sempre que for traçar uma reta, faça uma tabela relacionando valores de x e y para encontrar pontos, assim como o exemplo acima.

Podemos ver que **com dois pontos**, já é possível **traçar uma reta**. Mas podemos desenhar infinitos pontos sob uma reta.

Algo interessante é que quando conhecemos os pontos que passam por uma reta, conseguimos calcular o coeficiente angular da reta a partir deles.

Usamos a seguinte formula: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Sendo Δy **a variação do y** entre dois pontos, ou seja, y_{final}- $y_{inicial}$ (ou y_2-y_1), e Δx a **variação do x** entre dois pontos, ou seja, x_{final}-$x_{inicial}$ (ou x_2-x_1).

Vamos demonstrar isso com o exemplo dado acima.

m= $\frac{y2-y1}{x2-x1}$, m= $\frac{3-2}{1-0}$ =1. Assim como já havíamos descoberto.

Agora, se um exercício nos fornecer dois pontos, por exemplo A(-3,3) e B(3,2), como podemos achar a equação dessa reta?

Vamos primeiro encontrar o coeficiente angular (m).

m=$\frac{y2-y1}{x2-x1}$

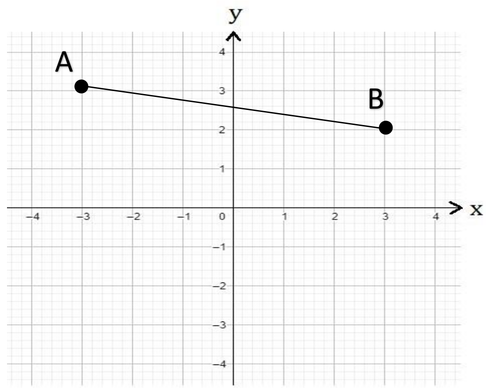
m= $\frac{2-3}{3-(-3)}$= $\frac{1}{6}$

Então, já temos que y=$\frac{-1}{6}$x+ q

Para achar q, vamos escolher um dos pontos que passa por essa reta e substituir na equação acima. Vamos usar o ponto A. Então, 3=-3 · ($\frac{-1}{6}$)+q → 3=$\frac{2}{3}$+q → q=$\frac{7}{3}$.

Então, a equação reduzida da reta será

y=$\frac{-1}{6}$x+$\frac{7}{3}$.



Como podemos ver, a reta cruza o eixo y no ponto (0, $\frac{7}{3}$), sendo $\frac{7}{3}$ mais ou menos igual a 2,4. O ponto que a função de primeiro grau cruza o eixo y é sempre igual ao coeficiente linear da reta.

Agora vamos fazer a operação inversa. Vamos verificar se os pontos A(0,2), B(3,3) e C(-1,1) pertencem a reta r: y=x+2. Para isso, basta substituir os pontos na equação da reta..

A: 2=0+2 → 2=2 (verdade, então o ponto A pertence a reta r)

B: 3=3+2 → 3=5 (falso, então o ponto B não pertence a reta r)

C: 1=-1+2 → 1=1 (verdade, então o ponto C pertence a reta r)

Retas paralelas e perpendiculares

Algo interessante em relação aos coeficientes angulares das retas é que podemos descobrir se duas **retas** em um mesmo plano são **perpendiculares ou paralelas a partir dos coeficientes**.

Supondo duas retas, r e s.

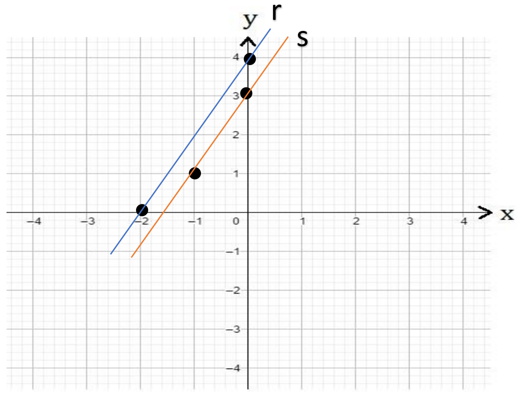
Quando **m_s=m_s, as retas são paralelas**. Por exemplo:

r: y=2x+4

s: y=2x+6

x_r	y_r
0	4
-2	0

x_s	y_s
-1	4
3	0



Como é possível ver na imagem acima, as retas r e s são paralelas, assim como poderíamos concluir vendo a equação reduzida das retas, já que o coeficiente angular de ambas é 2.

Quando duas retas são paralelas, é usada é seguinte notação: r // s

No caso das **retas perpendiculares**, ou seja, retas que formem um ângulo de 90º entre si, os coeficientes angulares se relacionam da seguinte maneira: **$m_s \cdot m_r$=-1.** Ou seja, o coeficiente angular de uma reta é o inverso da outra e possui sinal oposto.

Por exemplo, se ms= 3, mr=$\frac{-1}{3}$. Se ms=$\frac{1}{2}$, mr=-2.

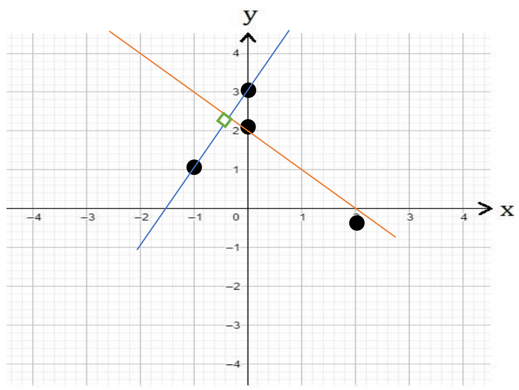
Vamos pensar nas retas:

r: y= 2x+3

s: y=$\frac{-1}{2}$x+2

x_r	y_r
0	3
-1	1

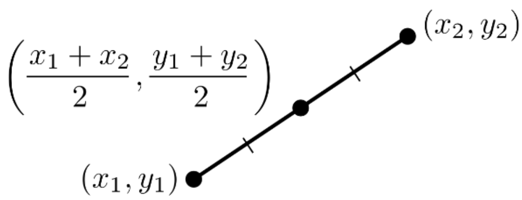
x_s	y_s
0	2
2	0



Como é possível perceber tanto pela imagem quanto pelos coeficientes angulares das retas, que são inversos e possuem sinal oposto, as retas são perpendiculares.

Ponto médio

Quando temos dois pontos, podemos usar a seguinte fórmula para encontrar o ponto médio deles. Ou seja, esse ponto **divide a reta a qual eles pertencem em duas partes iguais**.

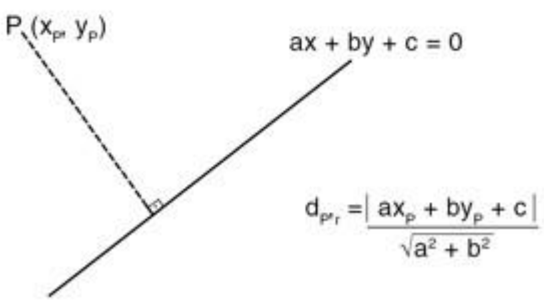


Exemplos:

1) Encontre o ponto médio (x_m, y_m) dos pontos A(-2, -3) e B(6, 3)
   x_m: $\frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$
   y_m: $\frac{-3+3}{2} = 0$
   Então o ponto médio é (2,0)
2) Encontre a reta perpendicular à reta s: $y=\frac{-1}{2}x+4$ e que passa pelo ponto médio de A(3,5) e B(1,3)
   Esse exercício exige alguns passos. Vamos começar encontrando o ponto médio dos pontos A e B
   x_m: $\frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
   y_m: $\frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$
   Então o ponto médio é (2,4)
   Agora temos que encontrar a reta que passa por esse ponto. Vamos chamá-la de r. Sabemos que $m_s=\frac{-1}{2}$. Como $m_s \cdot m_r=-1$, $m_r=2$.
   Com isso, sabemos que a equação reduzida de r é y=2x+q
   Vamos achar q substituindo o ponto médio na equação acima: $4=2 \cdot 2+q \rightarrow 4=4+q \rightarrow q=0$
   Portanto, a equação da reta r é y=2x.

Distância entre ponto e reta

Já sabemos encontrar a distância entre dois pontos, agora vamos aprender a calcular a distância entre um ponto e uma reta. Para isso, usamos a seguinte fórmula.



Nessa fórmula, utilizamos a **equação geral** de uma reta e a relacionamos com o par ordenado do ponto que estamos tratando. É importante que o valor dessa relação sempre seja expresso em **modulo**, já que distâncias nunca podem ser negativas. Vale lembrar que a,b e c são números reais, sendo a≠0 e b≠0, e (x,y) é um ponto genérico, de números reais também.

Importante: com essa fórmula, encontramos a **menor distância possível** entre o ponto e a reta. Ou seja, se traçarmos uma reta ligando esse ponto e a reta em questão, elas formariam um ângulo de 90º, o que é possível ver na figura acima.

Vamos demonstrar com um exemplo de como calcular essa distância.

Se P(3,3) e r: y=x+2, qual a distância entre o ponto P e a reta r?

Primeiro, como a equação da reta fornecida está na forma reduzida, precisamos passá-la para a equação geral. Nesse caso, basta mudar o lado do y. Teremos que r: x-y+2=0.

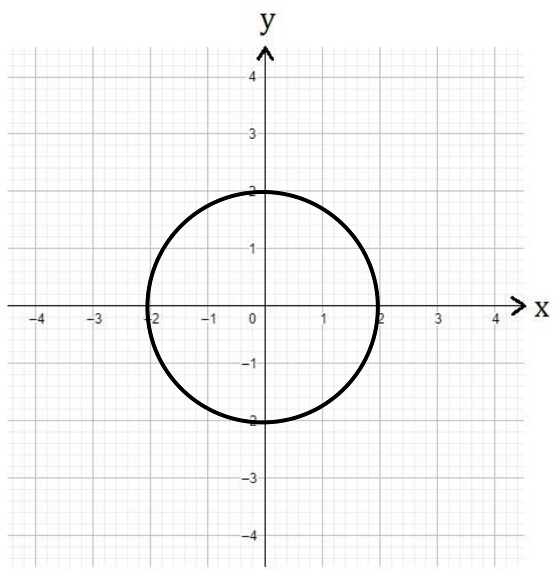
Agora vamos aplicar a fórmula. A partir da equação geral da reta, sabemos que a=1, b=-1 e c=2. Como P(3,3), x_p=3 e y_p=3. Então:

$$d= \frac{|1*3+(-1)*3+2|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} \rightarrow d=\frac{|3-3+2|}{\sqrt{2}} \rightarrow d=\frac{|2|}{\sqrt{2}} \rightarrow d=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Circunferência

Uma circunferência é uma figura geométrica, pertencente ao plano, formada por infinitos pontos, sendo que todos eles possuem a mesma distância do seu centro.

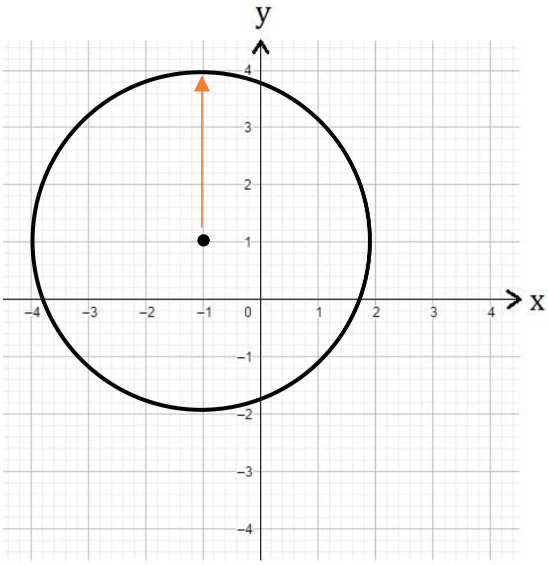
Então, os principais componentes de uma circunferência são: **o raio e o centro**. O raio é exatamente essa distância entre os pontos que formam a circunferência e o seu centro.



O centro de uma circunferência **é um ponto**, e podemos nos referir a ele como um par ordenado no plano cartesiano, C(x_c, y_c). No exemplo ao lado, vemos uma circunferência com o centro C(0,0). Podemos perceber pela imagem que a distância entre o centro e os pontos da circunferência é igual a 2, e, portanto, o raio dela é igual a 2. Ou seja, **qualquer ponto** dessa circunferência está a uma **distância de 2 de seu centro**.

Mesmo as circunferência serem figuras geométricas, podemos escrever uma equação algébrica para nos referirmos a elas. Essa é a equação: $r^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$

Nessa equação, x_c **e** y_c referem-se ao par ordenando do centro da circunferencia, e **r é o raio**. Então no caso da circunferencia do exemplo, cujo raio é 2 e o centro é C(0,0), a equação seria: $2^2=(x-0)^2+(y-0)^2 \rightarrow$ **$4=x^2+y^2$.**

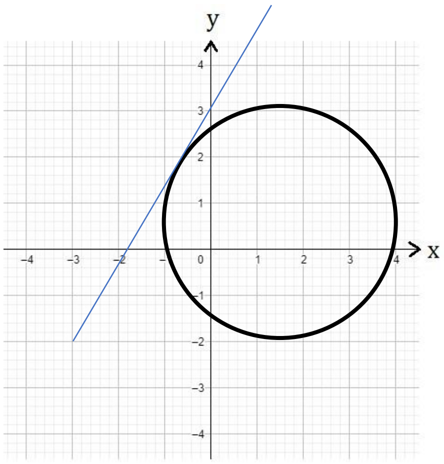


Agora vamos ver outro exemplo. A circunferência desenhada ao lado possui centro no ponto C(-1,1) e raio igual a 3. Então, a partir dessas informações, já podemos escrever a equação dessa circunferência, que será: $3^2=(x-(-1))^2+(y-1)^2$ $\rightarrow$ **$9=(x+1)^2+(y-1)^2$.**

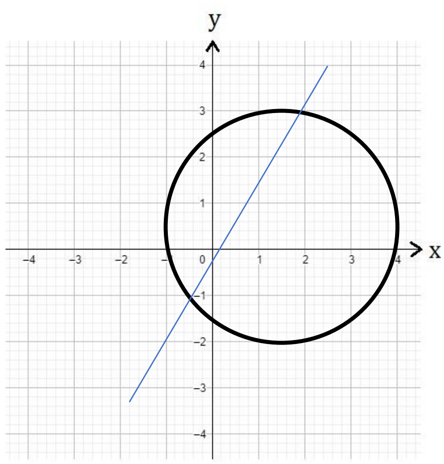
<u>Retas e circunferência</u>

Alguns exercícios trabalham com retas e circunferências simultaneamente. Podem ter 3 casos:

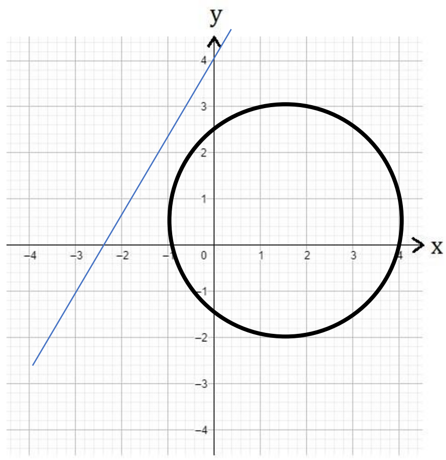
Reta tangente



Reta interna



Reta externa



Quando uma reta é **tangente** a circunferência, as duas se encontraram em somente **1 ponto**. Quando a reta é **interna**, ela cruza a circunferência em **2 pontos**. Já quando a reta é **externa**, ela não cruza a circunferência em **nenhum ponto**.

Vamos supor o seguinte caso:

Uma reta r de equação $3y=4x+6$ é interna, externa ou tangente a circunferência de equação $(x+2)^2+(x-1)^2=9$?

Para saber isso, vamos achar a **distância entre o centro da circunferência e a reta**. Se essa distância for **igual ao raio**, a reta é **tangente**. Se a distância for **menor que o raio**, a reta é **interna**. E se a distância for **maior que o raio**, a reta é **externa**.

Vendo a equação da circunferência, sabemos que x_c= -(2)= -2 e y_c= -(-1)=1. Então C(-2,1). Como $r^2=9 \rightarrow r=\sqrt{9}=3$.

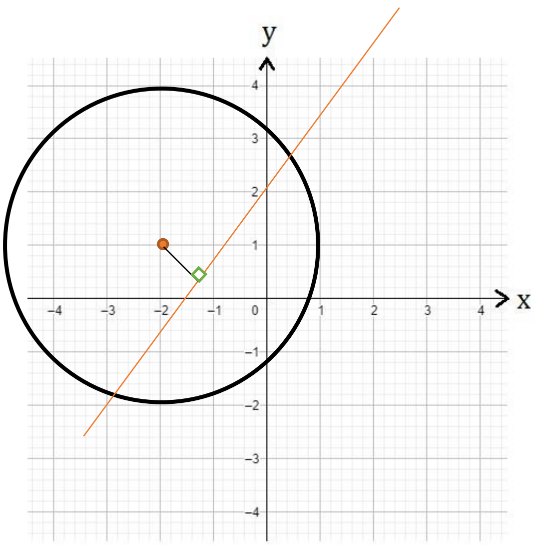
Agora vamos achar a distância entre o centro e a reta r.

A equação geral da reta r será 4x-3y+6=0, então a=4, b=-3 e c=6. Como faremos a distância em relação ao centro da circunferência, x_p=-2 e y_p=1.

$$d=\frac{|4*(-2)+(-3)*1+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \rightarrow d=\frac{|-8-3+6|}{\sqrt{16+9}} \rightarrow d=\frac{|-5|}{\sqrt{25}} \rightarrow d=\frac{5}{5}=1$$

Como d=1 e r=3, a distância é menor que o raio, então essa reta é interna a circunferência.

Vamos ver isso no plano cartesiano:

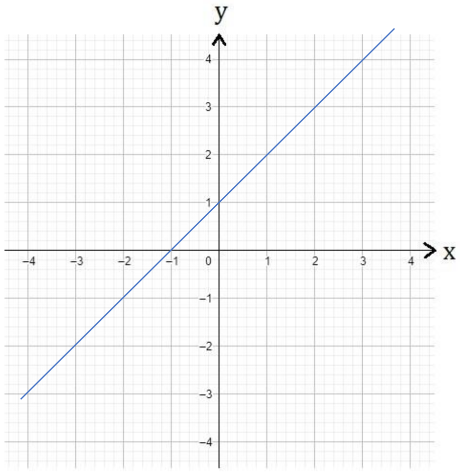


3y=4x+6

x	y
0	2
-1,5	0

<u>Inequações</u>

Em geometria analítica, também é possível que uma reta ou uma circunferência façam referência a uma determinada área de um gráfico, e nesse caso, são escritas em forma de inequação.



Por exemplo, se temos que $y>x+1$, significa que queremos saber todos os pontos do plano nos quais y é maior que $x+1$.

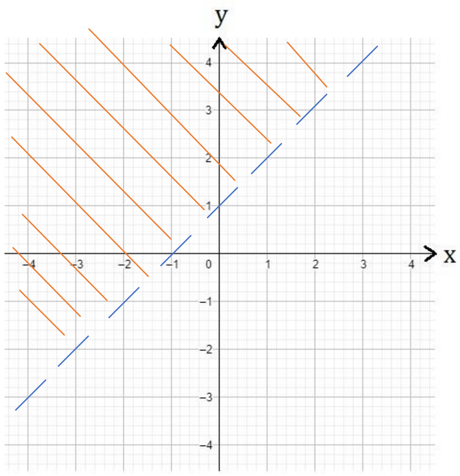
Para descobrir, primeiro traçamos a reta $y=x+1$

x	y
0	1
-1	0

Em qual região desse gráfico $y>x+1$?

Para descobrir isso, vamos supor um **ponto genérico**, como P(0,0). Em P(0,0), y é maior que $x+1$?

Vamos substituir os pontos em nossa inequação: $0>0+1 \rightarrow 0>1$ (falso). Então sabemos que em (0,0), y é menor que $x+1$. Então em toda a região na qual o ponto (0,0) está inserido, y também será menor que $x+1$.



Então, a área na qual y é maior que $x+1$ é a área **onde não está o ponto (0,0)**. Ou seja, toda a região que está pintada de laranja no gráfico ao lado. Vamos comprovar com um ponto dessa região, por exemplo, (-3,0).

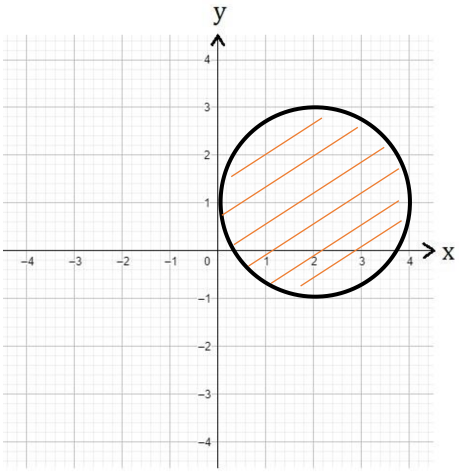
$0>-3+1 \rightarrow 0>-2$ (verdadeiro).

Outro fator importante é que os pontos que pertencem a reta $y=x+1$ não se enquadram na condição da inequação, pois ela pede os números de y que são maiores (>) que $x+1$, e não maiores ou iguais (≥). Por exemplo, o ponto que pertence a reta A(3,2). $3>2+1 \rightarrow 3>3$ (falso, 3 é = a 3). Por isso, desenhamos a reta no gráfico de maneira **pontilhada**.

Agora vamos ver um exemplo com uma circunferência.

Se $(x-2)^2+(x-1)^2 \leq 4$, qual região do plano devemos pintar?

Primeiro, vamos desenhar essa circunferência, cujo centro é (2,1) e o raio é $\sqrt{4}=2$.



Nesse caso, temos duas regiões que precisamos considerar, a interna e a externa à circunferência. Vamos utilizar o mesmo raciocínio que utilizamos no exemplo da reta acima. No ponto (0,0), $(x-2)^2+(x-1)^2$ é menor ou igual à 4?

Vamos testar: $(0-2)^2+(0-1)^2 \leq 4 \rightarrow 4+1 \leq 4 \rightarrow 5 \leq 4$(falso).

Então como (0,0) é um ponto externo a essa circunferência, a área que deve ser pintada é a interna, como acontece no desenho ao lado.

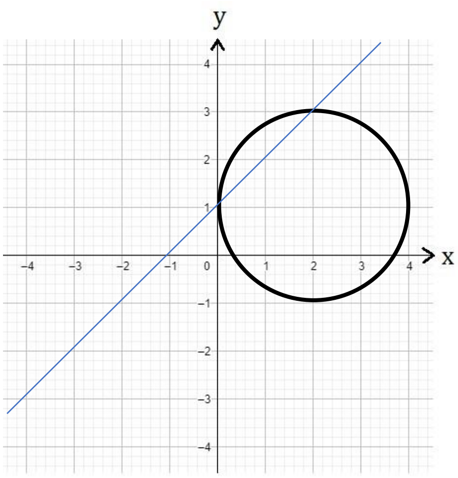
Também podemos pensar que sempre que uma inequação de circunferência pedir uma região **menor que r^2,** essa área será **interna**.

Agora vamos pensar em um caso misto. Vamos supor que temos duas inequações.

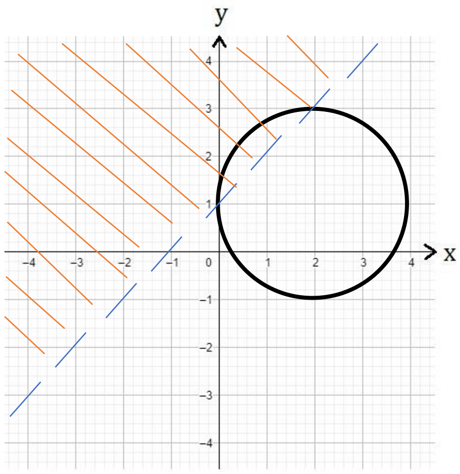
$$\begin{cases} y > x + 1 \\ (x-2)^2 + (x-1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

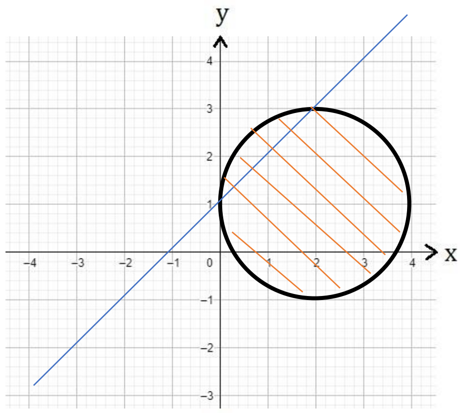
Nesse caso, as duas condições precisam ser cumpridas **simultaneamente**.

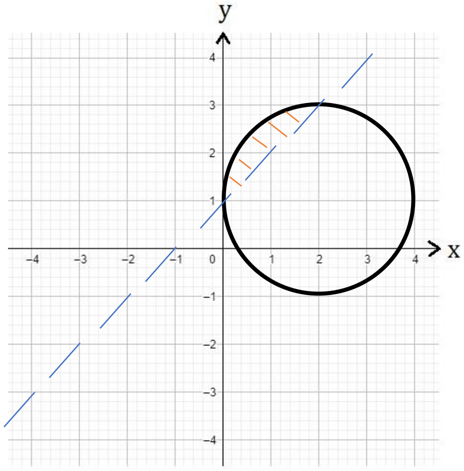
Então vamos começar desenhando essa reta (a mesma do primeiro exemplo) e essa circunferência (a mesma do segundo exemplo).



Primeiro, vamos pintar as regiões que satisfazem as duas inequações, primeiro a da reta (não podemos esquecer de desenhá-la de maneira pontilhada, já que os pontos que pertencem a reta não satisfazem a inequação), e em segundo a da circunferência.







A resposta para esse exercício será **a área em comum entre as duas imagens acima**, que corresponde a área pintada na figura ao lado.